Espaces vectoriels normés [2/3]

EL BAKKALI EL KADI Taha

College of Computing
UM6P

Critère de continuité d'une application linéaire

Critère de continuité d'une application linéaire

Proposition 1

Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue si, et seulement s'il existe $C \geq 0$ tel que : $\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|$.

Exemple 2:

- Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$ de dimension finie. L'application définie par $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ est continue.
- Munissons $C([0, \pi], \mathbb{K})$ de la norme infinie. L'application définie par $\varphi(f) = \int_0^{\pi} f(t) \sin(t)\, dt$ est continue.

Corollaire 3

Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue si, et seulement si, elle est bornée sur la boule unité.

Exemple 4: En munissant l'espace des polynome par la norme infinie, la dérivation n'est pas continue.

Exemple 5: Dans $C([0,1], \mathbb{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$, la forme linéaire suivante est définie par :

$$\varphi : C([0,1], \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad f \longmapsto f(1).$$

n'est pas continue.

Proposition 6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.

Norme subordonnée

Définition et proposition 7

Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$. L'ensemble des réels $C \geq 0$ tels que

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|$$

admet un plus petit élément, appelé norme subordonnée de u et noté $|||u|||$. On a de plus :

$$\begin{aligned} |||u||| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| \\ &= \sup_{\|x\| = 1} \|u(x)\|. \end{aligned}$$

Remarque: Par définition de la norme triple, on a pour tout $x \in E$, $||u(x)|| \leq |||u||| ||x||$.

Norme subordonnée

Exemple 8: Munissons $M_n(\mathbb{K})$ de la norme infinie, et munissons $\mathbb{K}^n$ du module usuel. La norme triple de l'application trace vaut n.

Proposition 9

Pour $(u, v) \in \mathcal{L}_c(E, F) \times \mathcal{L}_c(F, G)$, on a

$$|||v \circ u||| \leq |||u||| \,.\, |||v|||$$

Remarque: En général, on n'a pas égalité dans l'inégalité précédente. Par exemple, si $u \in \mathcal{L}_c(E)$ est nilpotent d'indice 2, alors on a $u^2 = 0$, donc $|||u^2||| = 0$, mais $|||u|||^2 > 0$.

Définition 10

Supposons $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ chacun muni d'une norme.

Étant donné $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle norme subordonnée de A, et l'on note $|||A|||$, la norme subordonnée de l'application linéaire canoniquement associée à A.

Exemple 11: Munissons $\mathbb{K}^n$ de la norme un. Étant donné $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a :

$$|||A|||_1 = \max_{j \in [[1,n]]} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Critère de continuité d'une application multilinéaire

Soient $E_1, \ldots, E_p$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, et l'espace $E_1 \times \cdots \times E_p$ est muni de la norme produit.

Proposition 12

Une application multilinéaire

$$\varphi : E_1 \times \cdots \times E_p \longrightarrow F$$

est continue si, et seulement si, il existe $C \geq 0$ tel que :

$$\forall (u_1, \ldots, u_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \quad \|\varphi(u_1, \ldots, u_p)\| \leq C \prod_{k=1}^{p} \|u_k\|.$$

.

Exemple 13: L'application puissance d'une matrice est continue.

Critère de continuité d'une application multilinéaire

Proposition 14

Soient $E_1, \ldots, E_p$ et F des espaces vectoriels normés. Si $E_1, \ldots, E_p$ sont de dimension finie, alors toute application p-linéaire

$$u : E_1 \times \cdots \times E_p \longrightarrow F$$

est continue.

Exemple 15: Soit $n \in \mathbb{N}$. Munissons l'espace $\mathbb{K}_n[X]$ de la norme définie par

$$\|P\| = \int_0^1 |P(t)|\, dt,$$

l'application $\mathbb{K}_n[X]^2 \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (P, Q) \longmapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$ est continue.

Continuité des applications polynomiales

Continuité des applications polynomiales

Définition 16

Une application $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est dite polynomiale s'il existe une famille presque nulle de scalaires $\left(\lambda_{k_1,\ldots,k_n}\right)_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n}$ telle que:

$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_{k_1,\ldots,k_n}\, x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}.$$

Définition 17

Supposons E de dimension finie. Soit $B = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. Une application $f : E \to \mathbb{K}$ est dite polynomiale s'il existe une famille presque nulle de scalaes $\left(\lambda_{k_1,\ldots,k_n}\right)_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n}$ telle que :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E, \quad f(x) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_{k_1,\ldots,k_n}\, x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}.$$

Proposition 18

Toute application polynomiale est continue

Corollaire 19

L'application

$$\det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad M \longmapsto \det(M),$$

est continue.